

Poisson 过程

许多偶然现象可用 Poisson 分布描述, 自然界、金融界中, Poisson 过程常用于建模事件在时间上的到达. 例如

- 交易发生、保险索赔;
- 交通流中的交通事故数;
- 地震记录;
- 信用违约, 市场崩盘, 交易频率等金融事件.

它们有相同的变化类型, 而每个变化可用时间或空间上的一个点表示. 我们关心随机事件的数目, 称为计数过程.

↪ 这类过程有两个性质:

- 在时间或空间上的均匀性;
- 未来的变化与过去的变化无关.

Poisson 过程是金融决策的“时间地图”.



Poisson 过程

许多偶然现象可用 Poisson 分布描述, 自然界、金融界中, Poisson 过程常用于建模事件在时间上的到达. 例如

- 交易发生、保险索赔;
- 交通流中的交通事故数;
- 地震记录;
- 信用违约, 市场崩盘, 交易频率等金融事件.

它们有相同的变化类型, 而每个变化可用时间或空间上的一个点表示. 我们关心随机事件的数目, 称为计数过程.

↪ 这类过程有两个性质:

- 在时间或空间上的均匀性;
- 未来的变化与过去的变化无关.

Poisson 过程是金融决策的“时间地图”.



引例. 假设股票交易订单到达率是每分钟 3 次, 即 $\lambda = 3$.

- (1) 求第一次订单到达时间超过 0.5 分钟的概率;
- (2) 已知第一次订单到达时间已超过 0.5 分钟, 求第二次到达时间超过 1 分钟的概率.



给定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, 先定义计数过程(counting process).

定义 4.2.1

设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的随机过程, 如果满足:
 $\forall \omega \in \Omega$, 其样本函数

$$t \mapsto N(t) \equiv N(t, \omega)$$

(以概率 1) 是一个只取非负整数值的, 右连续的, 单调增函数, 则称 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为计数过程.



计数过程名称的由来

例 4.2.1 设 $N(t)$ 为某电话交换台在 $(0, t]$ 内接到呼叫的累计次数, 则 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是计数过程. 通常关注如下变量:

◇ 对于 $0 \leq s < t$,

$N(t) - N(s)$ 为 $(s, t]$ 中发生的电话呼叫次数;

◇ 对于 $t \geq 0$,

$\Delta N(t) := N(t) - N(t-)$ 表示在时刻 t 电话的呼叫次数.

#



定义 4.2.2

如果计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 满足:

- (1) $N(0) = 0$ a.s.;
- (2) $N(t)$ 是独立增量过程:

对任意 $t, s \geq 0$, $N(t+s) - N(s)$ 与 \mathcal{F}_s 独立;

- (3) $N(t)$ 的其增量服从 Poisson 分布: 对任意 $t, s \geq 0$,

$$\mathbb{P}(N(t+s) - N(s) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

则称 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为具参数 λ 的(时齐) Poisson 过程.

通常, 称 λ 是过程的速率或强度.



例 4.2.2 顾客依速率为 4 人/小时的 Poisson 分布到达某商店, 已知商店上午 9 点钟开门. 求到 9:30 时仅到一位顾客, 而到 11:30 时已到 5 位顾客的概率.

解. 以上午九点作为 0 时刻, 1 小时作为单位时间. 设 $t \geq 0$, 用 $N(t)$ 表示 $(0, t]$ 内来到的顾客数, 则

$\{N(t), t \geq 0\}$ 是 $\lambda = 4$ 的 Poisson 过程.

所求概率为

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(N(0.5) = 1, N(2.5) = 5) \\ &= \mathbb{P}(N(0.5) = 1)\mathbb{P}(N(2.5) - N(0.5) = 4) \\ &= 2e^{-2} \cdot \frac{e^{-8}8^4}{4!} = 0.0155. \end{aligned}$$



例 4.2.2 顾客依速率为 4 人/小时的 Poisson 分布到达某商店, 已知商店上午 9 点钟开门. 求到 9:30 时仅到一位顾客, 而到 11:30 时已到 5 位顾客的概率.

解. 以上午九点作为 0 时刻, 1 小时作为单位时间. 设 $t \geq 0$, 用 $N(t)$ 表示 $(0, t]$ 内来到的顾客数, 则

$\{N(t), t \geq 0\}$ 是 $\lambda = 4$ 的 Poisson 过程.

所求概率为

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(N(0.5) = 1, N(2.5) = 5) \\ &= \mathbb{P}(N(0.5) = 1)\mathbb{P}(N(2.5) - N(0.5) = 4) \\ &= 2e^{-2} \cdot \frac{e^{-8}8^4}{4!} = 0.0155. \end{aligned}$$



例 4.2.2 顾客依速率为 4 人/小时的 Poisson 分布到达某商店, 已知商店上午 9 点钟开门. 求到 9:30 时仅到一位顾客, 而到 11:30 时已到 5 位顾客的概率.

解. 以上午九点作为 0 时刻, 1 小时作为单位时间. 设 $t \geq 0$, 用 $N(t)$ 表示 $(0, t]$ 内来到的顾客数, 则

$\{N(t), t \geq 0\}$ 是 $\lambda = 4$ 的 Poisson 过程.

所求概率为

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(N(0.5) = 1, N(2.5) = 5) \\ &= \mathbb{P}(N(0.5) = 1) \mathbb{P}(N(2.5) - N(0.5) = 4) \\ &= 2e^{-2} \cdot \frac{e^{-8} 8^4}{4!} = 0.0155. \end{aligned}$$



例 4.2.2 顾客依速率为 4 人/小时的 Poisson 分布到达某商店, 已知商店上午 9 点钟开门. 求到 9:30 时仅到一位顾客, 而到 11:30 时已到 5 位顾客的概率.

解. 以上午九点作为 0 时刻, 1 小时作为单位时间. 设 $t \geq 0$, 用 $N(t)$ 表示 $(0, t]$ 内来到的顾客数, 则

$\{N(t), t \geq 0\}$ 是 $\lambda = 4$ 的 Poisson 过程.

所求概率为

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(N(0.5) = 1, N(2.5) = 5) \\ &= \mathbb{P}(N(0.5) = 1)\mathbb{P}(N(2.5) - N(0.5) = 4) \\ &= 2e^{-2} \cdot \frac{e^{-8}8^4}{4!} = 0.0155. \end{aligned}$$



例 4.1.1 考虑随机点在时间 $(0, t]$ 内发生的次数, 记为 $\{N(t), t \geq 0\}$, $N(0) = 0$. 设在 $(t_0, t_0 + t]$ 内有 k 个随机点发生的概率与 t_0 无关, 且

$$N(t_0 + t) - N(t_0) \text{ 与 } N(t) \text{ 同分布于 } P(\lambda t).$$

定义过程 $\{X(t), t \geq 0\}$:

$$X(t) = \begin{cases} 1, & \text{若随机点在 } (0, t] \text{ 内发生偶数次,} \\ -1, & \text{若随机点在 } (0, t] \text{ 内发生奇数次,} \end{cases}$$

求 $X = \{X(t), t \geq 0\}$ 的均值函数与自相关函数.



解. (先求 X 的一维分布.)

记 $A :=$ “随机点在 $(0, t]$ 内发生偶数次”, 则

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(N(t) = 0) + \mathbb{P}(N(t) = 2) + \mathbb{P}(N(t) = 4) + \cdots \\ &= e^{-\lambda t} \left(1 + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \frac{(\lambda t)^4}{4!} + \cdots \right) \\ &= e^{-\lambda t} \frac{e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}}{2}, \end{aligned}$$

\therefore

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X(t) = 1) &= e^{-\lambda t} \frac{e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}}{2}, \\ \mathbb{P}(X(t) = -1) &= e^{-\lambda t} \frac{e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}}{2}, \end{aligned}$$

从而 $\mathbb{E}[X(t)] = e^{-2\lambda t}$.



解. (先求 X 的一维分布.)

记 $A :=$ “随机点在 $(0, t]$ 内发生偶数次”, 则

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(N(t) = 0) + \mathbb{P}(N(t) = 2) + \mathbb{P}(N(t) = 4) + \cdots \\ &= e^{-\lambda t} \left(1 + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \frac{(\lambda t)^4}{4!} + \cdots \right) \\ &= e^{-\lambda t} \frac{e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}}{2}, \end{aligned}$$

\therefore

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X(t) = 1) &= e^{-\lambda t} \frac{e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}}{2}, \\ \mathbb{P}(X(t) = -1) &= e^{-\lambda t} \frac{e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}}{2}, \end{aligned}$$

从而 $\mathbb{E}[X(t)] = e^{-2\lambda t}$.



解. (先求 X 的一维分布.)

记 $A :=$ “随机点在 $(0, t]$ 内发生偶数次”, 则

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(N(t) = 0) + \mathbb{P}(N(t) = 2) + \mathbb{P}(N(t) = 4) + \cdots \\ &= e^{-\lambda t} \left(1 + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \frac{(\lambda t)^4}{4!} + \cdots \right) \\ &= e^{-\lambda t} \frac{e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}}{2},\end{aligned}$$

\therefore

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X(t) = 1) &= e^{-\lambda t} \frac{e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}}{2}, \\ \mathbb{P}(X(t) = -1) &= e^{-\lambda t} \frac{e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}}{2},\end{aligned}$$

从而 $\mathbb{E}[X(t)] = e^{-2\lambda t}$.



(续) 对于 $0 < t_1 < t_2$, 因为

$X(t_1) = 1, X(t_2) = 1$ 等价于 $N(t_1)$ 为偶数, $N(t_2) - N(t_1)$ 为偶数,

$X(t_1) = -1, X(t_2) = -1$ 等价于 $N(t_1)$ 为奇数, $N(t_2) - N(t_1)$ 为奇数,

根据同分布的假设以及独立性可得

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X(t_1)X(t_2) = 1) \\ &= \mathbb{P}(X(t_1) = 1 = X(t_2)) + \mathbb{P}(X(t_1) = -1 = X(t_2)) \\ &= \frac{1}{4}(1 + e^{-2\lambda t_1})(1 + e^{-2\lambda(t_2-t_1)}) + \frac{1}{4}(1 - e^{-2\lambda t_1})(1 - e^{-2\lambda(t_2-t_1)}) \\ &= \frac{1}{2}(1 + e^{-2\lambda(t_2-t_1)}). \end{aligned}$$

类似计算可得

$$\mathbb{P}(X(t_1)X(t_2) = -1) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2\lambda(t_2-t_1)}).$$

从而, 自相关函数 $\mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)] = e^{-2\lambda(t_2-t_1)}$



(续) 对于 $0 < t_1 < t_2$, 因为

$X(t_1) = 1, X(t_2) = 1$ 等价于 $N(t_1)$ 为偶数, $N(t_2) - N(t_1)$ 为偶数,

$X(t_1) = -1, X(t_2) = -1$ 等价于 $N(t_1)$ 为奇数, $N(t_2) - N(t_1)$ 为奇数,

根据同分布的假设以及独立性可得

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X(t_1)X(t_2) = 1) \\ &= \mathbb{P}(X(t_1) = 1 = X(t_2)) + \mathbb{P}(X(t_1) = -1 = X(t_2)) \\ &= \frac{1}{4}(1 + e^{-2\lambda t_1})(1 + e^{-2\lambda(t_2-t_1)}) + \frac{1}{4}(1 - e^{-2\lambda t_1})(1 - e^{-2\lambda(t_2-t_1)}) \\ &= \frac{1}{2}(1 + e^{-2\lambda(t_2-t_1)}). \end{aligned}$$

类似计算可得

$$\mathbb{P}(X(t_1)X(t_2) = -1) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2\lambda(t_2-t_1)}).$$

从而, 自相关函数 $\mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)] = e^{-2\lambda(t_2-t_1)}$



(续) 对于 $0 < t_1 < t_2$, 因为

$X(t_1) = 1, X(t_2) = 1$ 等价于 $N(t_1)$ 为偶数, $N(t_2) - N(t_1)$ 为偶数,

$X(t_1) = -1, X(t_2) = -1$ 等价于 $N(t_1)$ 为奇数, $N(t_2) - N(t_1)$ 为奇数,

根据同分布的假设以及独立性可得

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X(t_1)X(t_2) = 1) \\ &= \mathbb{P}(X(t_1) = 1 = X(t_2)) + \mathbb{P}(X(t_1) = -1 = X(t_2)) \\ &= \frac{1}{4}(1 + e^{-2\lambda t_1})(1 + e^{-2\lambda(t_2-t_1)}) + \frac{1}{4}(1 - e^{-2\lambda t_1})(1 - e^{-2\lambda(t_2-t_1)}) \\ &= \frac{1}{2}(1 + e^{-2\lambda(t_2-t_1)}). \end{aligned}$$

类似计算可得

$$\mathbb{P}(X(t_1)X(t_2) = -1) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2\lambda(t_2-t_1)}).$$

从而, 自相关函数 $\mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)] = e^{-2\lambda(t_2-t_1)}$.



- Ex14. (习题二) 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数为 $\lambda (> 0)$ 的 Poisson 过程, 求:
- (1) 二维概率分布;
 - (2) n 维概率分布.



方法一：独立增量法

分解

$$P(N(t_1) = k_1, N(t_2) = k_2) = P(N(t_1) = k_1) \cdot P(N(t_2) - N(t_1) = k_2 - k_1)$$

第一项

$$P(N(t_1) = k_1) = \frac{e^{-\lambda t_1} (\lambda t_1)^{k_1}}{k_1!}$$

: Poisson(λt_1)

第二项

$$P(N(t_2) - N(t_1) = k_2 - k_1) = \frac{e^{-\lambda(t_2 - t_1)} [\lambda(t_2 - t_1)]^{k_2 - k_1}}{(k_2 - k_1)!}$$

: Poisson($\lambda(t_2 - t_1)$)

结果

$$P = \frac{e^{-\lambda t_2} \lambda^{k_2} t_1^{k_1} (t_2 - t_1)^{k_2 - k_1}}{k_1! (k_2 - k_1)!}$$



方法二：边缘 \times 条件

分解

$$P(N(t_1) = k_1, N(t_2) = k_2) = P(N(t_2) = k_2) \cdot P(N(t_1) = k_1 | N(t_2) = k_2)$$

边缘分布

$$P(N(t_2) = k_2) = \frac{e^{-\lambda t_2} (\lambda t_2)^{k_2}}{k_2!}$$

: Poisson(λt_2)

条件分布

$$P(N(t_1) = k_1 | N(t_2) = k_2) = \binom{k_2}{k_1} \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{k_1} \left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right)^{k_2 - k_1}$$

: Binomial($k_2, t_1/t_2$)

思考：上述条件分布的本质？



方法二：边缘 \times 条件

分解

$$P(N(t_1) = k_1, N(t_2) = k_2) = P(N(t_2) = k_2) \cdot P(N(t_1) = k_1 \mid N(t_2) = k_2)$$

边缘分布

$$P(N(t_2) = k_2) = \frac{e^{-\lambda t_2} (\lambda t_2)^{k_2}}{k_2!}$$

: Poisson(λt_2)

条件分布

$$P(N(t_1) = k_1 \mid N(t_2) = k_2) = \binom{k_2}{k_1} \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{k_1} \left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right)^{k_2 - k_1}$$

: Binomial($k_2, t_1/t_2$)

思考：上述条件分布的本质？



一些概率性质

1. $\mathbb{E}[N(t)] = D(N(t)) = \lambda t$;
2. $\text{Cov}(N(s), N(t)) = \lambda(s \wedge t)$;
3. 对任意 $t > s$, $n \geq m$,

$$\mathbb{P}(N(t) = n | N(s) = m) = e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^{n-m}}{(n-m)!},$$

$$\mathbb{P}(N(s) = m | N(t) = n) = C_n^m \left(\frac{s}{t}\right)^m \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-m}.$$



一些概率性质

1. $\mathbb{E}[N(t)] = D(N(t)) = \lambda t$;
2. $\text{Cov}(N(s), N(t)) = \lambda(s \wedge t)$;
3. 对任意 $t > s, n \geq m$,

$$\mathbb{P}(N(t) = n | N(s) = m) = e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^{n-m}}{(n-m)!},$$

$$\mathbb{P}(N(s) = m | N(t) = n) = C_n^m \left(\frac{s}{t}\right)^m \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-m}.$$



一些概率性质

1. $\mathbb{E}[N(t)] = D(N(t)) = \lambda t$;
2. $\text{Cov}(N(s), N(t)) = \lambda(s \wedge t)$;
3. 对任意 $t > s, n \geq m$,

$$\mathbb{P}(N(t) = n | N(s) = m) = e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^{n-m}}{(n-m)!},$$

$$\mathbb{P}(N(s) = m | N(t) = n) = C_n^m \left(\frac{s}{t}\right)^m \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-m}.$$



一些概率性质

1. $\mathbb{E}[N(t)] = D(N(t)) = \lambda t$;
2. $\text{Cov}(N(s), N(t)) = \lambda(s \wedge t)$;
3. 对任意 $t > s, n \geq m$,

$$\mathbb{P}(N(t) = n | N(s) = m) = e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^{n-m}}{(n-m)!},$$

$$\mathbb{P}(N(s) = m | N(t) = n) = C_n^m \left(\frac{s}{t}\right)^m \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-m}.$$



命题 4.2.1

取时间区间 $[0, \infty)$ 上的两点 $a, b: a < b$, $N(b) - N(a)$ 表示 $(a, b]$ 内发生的事件数. 如果满足

- (1) 在不相交区间上事件发生的数目相互独立;
- (2) 对任意 t, h , $N(t+h) - N(t)$ 的分布只与 h 有关;
- (3) 存在 $\lambda > 0$, 使得当 $h \rightarrow 0$ 时,

$$\mathbb{P}(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda h + o(h);$$

- (4) 当 $h \rightarrow 0$ 时, $\mathbb{P}(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$,
- 那么 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数为 λ 的 Poisson 过程.

↔ 连接了过程的宏观统计特性 (Poisson 分布) 与微观局部性质 (稀有性, 独立平稳增量), 使得我们既可以从理论分布出发, 也可以从直观的物理机制出发来定义和应用 Poisson 过程.



证明思想: 时间切片 + Bernoulli 试验

核心思路

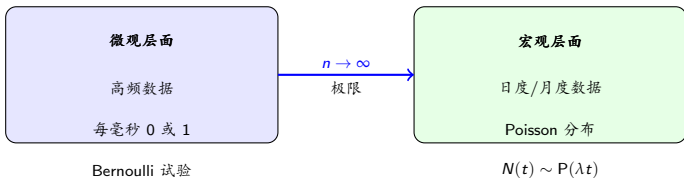
- ① 把 $[0, t]$ 切成 n 个极小的时间段 $\Delta t = t/n$;
- ② 每个 Δt 内: 要么发生 1 次, 要么发生 0 次;
- ③ 这 n 个时间段看作 n 次独立的 **Bernoulli 试验**;
- ④ 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 二项分布 \rightarrow **Poisson 分布**.

Poisson 定理

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k} = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!}$$



直观图示：微观 \rightarrow 宏观



等价定义连接了微观机制与宏观分布！



§4.3 来到间隔与等待时间的分布



问题背景

某金融客服热线接到电话的过程服从 Poisson 过程，强度 $\lambda = 6$ 通/小时。

已知在 1 小时内接到的电话数 $N(1) \sim P(6)$ 。

问题 (1): 计数视角

1 小时内接到恰好 4 通电话的概率是多少?

$$P(N(1) = 4) = \frac{e^{-6} \cdot 6^4}{4!} \approx 0.1339$$

问题 (2): 时间视角

第一通电话在 10 分钟内打进来的概率是多少?

$$P(S_1 \leq 1/6) = ?$$



问题背景

某金融客服热线接到电话的过程服从 Poisson 过程，强度 $\lambda = 6$ 通/小时。

已知在 1 小时内接到的电话数 $N(1) \sim P(6)$ 。

问题 (1): 计数视角

1 小时内接到恰好 4 通电话的概率是多少？

$$P(N(1) = 4) = \frac{e^{-6} \cdot 6^4}{4!} \approx 0.1339$$

问题 (2): 时间视角

第一通电话在 10 分钟内打进来的概率是多少？

$$P(S_1 \leq 1/6) = ?$$



思维转换

Pb (1) : 固定时间内有多少事件? $\Rightarrow N(t)$

Pb (2) : 事件发生需要等多久? $\Rightarrow S_n$



设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为参数为 λ 的 Poisson 过程, $n \geq 1$.

时间间隔序列

$$X_n = S_n - S_{n-1}, \quad S_0 = 0$$

X_1 : 第 1 次事件的等待时间

X_2 : 第 1 次到第 2 次的时间间隔

· · · ·

等待时间序列

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

S_1 : 第 1 次事件发生时刻

S_2 : 第 2 次事件发生时刻

· · · ·



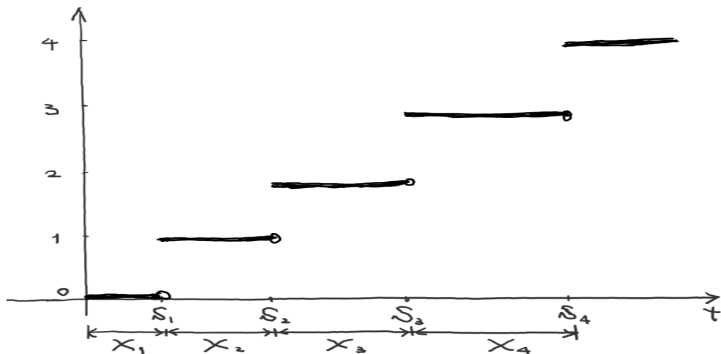


图 4.1 来到时间间隔与等待时间序列

几个等价事件:

对任意 $t \geq 0, n \geq 0$,

$$\{N(t) \geq n\} = \{S_n \leq t\},$$

$$\begin{aligned}\{N(t) = n\} &= \{S_n \leq t < S_{n+1}\} \\ &= \{S_n \leq t\} \setminus \{S_{n+1} \leq t\}.\end{aligned}$$



两个时间序列的分布

命题 4.3.1 (来到时间间隔的分布)

$X_n, n \geq 1$ 为 i.i.d., 均值为 $1/\lambda$ 的指数分布随机变量序列.

命题 4.3.2: (等待时间的分布)

$S_n \sim \Gamma(n, \lambda)$, 即其密度函数为

$$0 \leq t \mapsto \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

特别的, $X_1 \equiv S_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$.



例 4.3.1 (例 4.2.2 的续)

顾客依速率为4人/小时的 Poisson 分布到达某商店,
已知商店上午9点钟开门.

- (1) 求第2位顾客在10点前到达的概率;
- (2) 求第1位顾客在9:30前到达且第2位顾客在10点前到达的概率.



时间序列的应用

- step 1. 生成一系列 i.i.d., 均值为 $1/\lambda$ 的指数分布随机变量序列 $\{X_n, n \geq 1\}$;
- step 2. 令 $S_n = X_1 + \cdots + X_n$: 第 n 个事件发生的时刻;
- step 3. 对于 $t \geq 0$, 定义

$$N(t) := \begin{cases} 0, & t < S_1, \\ k, & S_k \leq t < S_{k+1}, k \geq 1, \end{cases}$$

则 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数为 λ 的 Poisson 过程.



为什么上述构造是 Poisson 过程?

事实上, 最关键的性质源于指数分布的无记忆性.

1. 独立增量性与平稳增量性:

无记忆性导致过程从任何时刻 s 重新开始, 到下一个事件发生的剩余等待时间分布与原过程相同.
这意味着

在任何时间区间内, 事件发生的规律是相同的(平稳性), 且不相交区间内的事件数相互独立(独立增量).

2. 计数服从 Poisson 分布: 可以利用 Gamma 分布的分布函数, 或利用特征函数/矩母函数的方法证明.

3. 满足微观条件:

- 在极小时间 h 内, 发生一次事件的概率近似为 λh (由指数分布的线性近似可得).
- 在极小时间 h 内, 发生两次及以上事件的概率是 $o(h)$ (可以严格证明).



(下面关注两个 Poisson 过程的合流(Poisson 分布再生性的推广)有关的应用题.)

例 4.3.2 某班学生要去 A 教室上数学课, 现有两个入口 B 和 C 可以进入 A 教室.

设在时刻 $t(> 0)$ 从 B 口进入 A 教室的学生人数为 $N_1(t)$, 从 C 口进入 A 教室的学生人数为 $N_2(t)$,

$$N_1(0) = N_2(0) = 0.$$

假设 $N_1 = \{N_1(t), t \geq 0\}$, $N_2 = \{N_2(t), t \geq 0\}$ 是两个强度分别为 0.5 和 1.5 的独立的 Poisson 过程. 试问:

- (1) 在一个固定的三分钟内没有学生进入 A 教室的概率是多少?
- (2) 学生到达 A 教室的时间间隔的均值是多少?



Ex 3. (p 136) 某银行有两个窗口可以接受服务.

上午9点小王到达这个银行, 此时两个窗口分别有一个顾客在接受服务, 另外有2个顾客排在小王前面等待接受服务, 一会儿又来了很多顾客.

假设服务的规则是先来先服务, 也就是说一旦有一个窗口的顾客接受完服务, 那么排在队伍中的第一个顾客马上在此窗口接受服务.

假设各个顾客接受服务的时间独立同分布于均值为20分钟的指数分布,

问: 小王在10点钟之前能够接受服务的概率是多少?



第四节 来到时间的条件分布

- ◇ Poisson 过程的完全随机性, 直观上讲就是, 一旦你知道了一定时间内的事件总数, 这些事件在时间轴上的具体位置就变得“失忆”了, 它们只是均匀随机点.



先看一个引例.

例 4.4.1 在 $[0, t)$ 中有一个事件发生的条件下, 这个事件发生的时间 X_1 是个均匀分布的随机变量.

事实上, 对 $s \leq t$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 < s | N(t) = 1) &= \frac{\mathbb{P}(X_1 < s, N(t) = 1)}{\mathbb{P}(N(t) = 1)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\text{在 } [0, s) \text{ 中有一个事件发生, 在 } [s, t) \text{ 中没有事件发生})}{\mathbb{P}(N(t) = 1)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\text{在 } [0, s) \text{ 中有一个事件发生})\mathbb{P}(\text{在 } [s, t) \text{ 中没有事件发生})}{\mathbb{P}(N(t) = 1)} \\ &= \frac{\lambda s e^{-\lambda s} e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t}. \end{aligned}$$



先看一个引例.

例 4.4.1 在 $[0, t)$ 中有一个事件发生的条件下, 这个事件发生的时间 X_1 是个均匀分布的随机变量.

事实上, 对 $s \leq t$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 < s | N(t) = 1) &= \frac{\mathbb{P}(X_1 < s, N(t) = 1)}{\mathbb{P}(N(t) = 1)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\text{在 } [0, s) \text{ 中有一个事件发生, 在 } [s, t) \text{ 中没有事件发生})}{\mathbb{P}(N(t) = 1)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\text{在 } [0, s) \text{ 中有一个事件发生})\mathbb{P}(\text{在 } [s, t) \text{ 中没有事件发生})}{\mathbb{P}(N(t) = 1)} \\ &= \frac{\lambda s e^{-\lambda s} e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t}. \end{aligned}$$



引理 4.4.1:

设 Y_1, \dots, Y_n 为 i.i.d. 随机变量序列, 其密度函数为 f , 则顺序统计量 $(Y_{(1)}, \dots, Y_{(n)})$ 的联合密度函数为

$$f(y_1, \dots, y_n) = \begin{cases} n! \prod_{i=1}^n f(y_i), & y_1 < \dots < y_n, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

特别的, 若 $Y_1, \dots, Y_n \sim U(0, t)$, 则

$$f(y_1, \dots, y_n) = \begin{cases} \frac{n!}{t^n}, & 0 < y_1 < \dots < y_n < t, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$



Poisson 过程的完全随机性

定理 4.4.1:

在已知 $N(t) = n$ 的条件下,
 n 个顾客的来到时刻 S_1, \dots, S_n 与
 n 个 $[0, t]$ 上均匀分布的独立随机变量的顺序统计量有相同分布.
即

$$f_{S_1, \dots, S_n | N(t)=n}(s_1, \dots, s_n) = \frac{n!}{t^n}, \quad 0 < s_1 < \dots < s_n \leq t.$$



证. 将 $[0, t]$ 分成 $n+1$ 个区间: $0 \leq t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} \leq t$,
令 h_i 充分小并满足 $t_i + h_i < t_{i+1}$ ($i = 1, \cdots, n$), 则

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(S_i \in [t_i, t_i + h_i], i = 1, \cdots, n | N(t) = n) \\ &= \frac{\mathbb{P}(\text{各 } [t_i, t_i + h_i] \text{ 中恰有一事件发生}(1 \leq i \leq n), \text{再无其他})}{\mathbb{P}(N(t) = n)} \\ &= \frac{\lambda h_1 e^{-\lambda h_1} \cdots \lambda h_n e^{-\lambda h_n} \cdot e^{-\lambda(t-h_1-\cdots-h_n)}}{\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}} \\ &= h_1 \cdots h_n \frac{n!}{t^n}. \end{aligned}$$

令 $h_i \downarrow 0$ ($\forall i$), 得证. □

注释 4.4.1(例 4.3.2 续).



证. 将 $[0, t]$ 分成 $n+1$ 个区间: $0 \leq t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} \leq t$,
令 h_i 充分小并满足 $t_i + h_i < t_{i+1}$ ($i = 1, \cdots, n$), 则

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(S_i \in [t_i, t_i + h_i], i = 1, \cdots, n | N(t) = n) \\ &= \frac{\mathbb{P}(\text{各 } [t_i, t_i + h_i] \text{ 中恰有一事件发生 } (1 \leq i \leq n), \text{ 再无其他})}{\mathbb{P}(N(t) = n)} \\ &= \frac{\lambda h_1 e^{-\lambda h_1} \cdots \lambda h_n e^{-\lambda h_n} \cdot e^{-\lambda(t-h_1-\cdots-h_n)}}{\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}} \\ &= h_1 \cdots h_n \frac{n!}{t^n}. \end{aligned}$$

令 $h_i \downarrow 0$ ($\forall i$), 得证. □

注释 4.4.1(例 4.3.2 续).



金融实例:

- ◇ 高频交易: 已知某股票在 1 秒内成交了 100 笔, 那么这 100 笔成交的时间戳, 可以看作是这 1 秒内均匀随机出现的点.
- ◇ 风险建模: 已知一天内发生了若干次市场冲击事件, 在建模时, 可以假设它们在该交易日内是均匀随机发生的.
- ◇ 客服中心: 已知一小时接了 20 个电话, 那么这 20 个来电的时刻近似均匀分布在这一小时内.



例 4.4.2 假设乘客按速率 λ 的 Poisson 过程到达一个火车站. 若火车在 t 时刻离开, 求 $(0, t)$ 中到达的乘客总的等待时间的和的平均

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N(t)} (t - S_i)\right].$$



解. 对任意 n ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N(t)} (t - S_i) \mid N(t) = n\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n (t - S_i) \mid N(t) = n\right] \\ &= nt - \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n S_i \mid N(t) = n\right] = nt - \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n U_{(i)}\right] \\ &\quad (\because U_{(1)}, U_{(2)}, \dots, U_{(n)} \text{ 是 } (0, t) \text{ 上均匀分布的顺序统计量}) \\ &= nt - \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n U_i\right] = \frac{nt}{2}, \end{aligned}$$

从而

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N(t)} (t - S_i)\right] = \frac{t}{2} \mathbb{E}[N(t)] = \frac{\lambda t^2}{2}.$$



关于到达时间还有如下结果(Campbell - Mecke 定理的特例).

定理 4.4.2:

对于任意 $[0, \infty)$ 上的可积函数 f , 有

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} f(S_n)\right] = \lambda \int_0^{\infty} f(t)dt.$$

(证明略)应用例如下.



例 4.4.4 设一部仪器承受冲击, 冲击遵循参数为 λ 的 Poisson 过程来到, 第 i 次冲击造成损伤 D_i , $N(t)$ 表示 $[0, t]$ 内的冲击次数. 假定 $D_i, i \geq 1$ 独立同分布且与 $\{N(t), t \geq 0\}$ 独立, 假定冲击引起的损伤随时间呈指数地衰减, 即若一次冲击造成的初始损伤为 D , 时间 t 之后造成的损伤为

$$De^{-\alpha t}, \alpha > 0.$$

再假定损伤是可加的, 则在 t 时刻的损伤可表示为

$$D(t) := \sum_{i=1}^{N(t)} D_i e^{-\alpha(t-S_i)},$$

其中 S_i 表示第 i 次冲击来的时刻. 求其期望.



另解. 取

$$f(s) = 1_{[0,t]}(s) \cdot e^{-\alpha(t-s)},$$

则

$$D(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} D_i e^{-\alpha(t-S_i)} = \sum_{i \geq 1} 1_{\{S_i \leq t\}} \cdot D_i e^{-\alpha(t-S_i)} = \sum_{i \geq 1} D_i f(S_i),$$

那么

$$\begin{aligned} \mathbb{E}D(t) &= \sum_{i \geq 1} \mathbb{E}[D_i f(S_i)] = \mathbb{E}[D] \mathbb{E}\left[\sum_{i \geq 1} f(S_i)\right] \\ &= \mathbb{E}[D] \lambda \int_0^\infty f(s) ds = \mathbb{E}[D] \lambda \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} ds \\ &= \frac{\lambda \mathbb{E}[D]}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}). \end{aligned}$$



第六节 复合 Poisson 过程

- 引例.
- ① (保险理赔) 今年发生了 100 起事故, 这 100 起事故总共赔了多少钱?
 - ② (高频交易) 来了 50 个订单, 这 50 个订单的总成交量是多少?
 - ③ (操作风险) 系统故障 5 次, 这 5 次故障总共导致多少损失?

◇ 需要一个模型, 复合 Poisson 过程,

既能描述频率(Poisson), 又能描述幅度(随机变量 Y_i).



第六节 复合 Poisson 过程

- 引例.
- ① (保险理赔) 今年发生了 100 起事故, 这 100 起事故总共赔了多少钱?
 - ② (高频交易) 来了 50 个订单, 这 50 个订单的总成交量是多少?
 - ③ (操作风险) 系统故障 5 次, 这 5 次故障总共导致多少损失?
- ◇ 需要一个模型, 复合 Poisson 过程,
- 既能描述频率(Poisson), 又能描述幅度(随机变量 Y_i).



复合 Poisson 过程的定义

定义 4.6.1

对任意 $t \geq 0$, 定义

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i.$$

其中, Y_1, Y_2, \dots 为 i.i.d. 随机序列, 且与参数为 λ 的 Poisson 过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 独立, 则称随机过程

$X = \{X(t), t \geq 0\}$ 是复合 Poisson 过程.



一些性质:

- ① * $X(t)$ 的矩母函数

$$\phi_t(u) \equiv \mathbb{E}[e^{uX(t)}] = \exp\{\lambda t(\phi_Y(u) - 1)\}.$$

其中, $\phi_Y(u) = E[e^{uY}]$.

- ② 记 Y 的均值与方差分别为 μ_Y, σ_Y^2 , 则有

$$\mathbb{E}[X(t)] = \lambda t \cdot \mathbb{E}Y = \lambda t \cdot \mu_Y,$$

$$\mathbf{D}(X(t)) = \lambda t \cdot \mathbb{E}Y^2 = \lambda t \cdot (\sigma_Y^2 + \mu_Y^2).$$



例 4.6.1 设机场的乘客以 Poisson 过程到达, 到达的客机数平均每小时 5 架, 客机共有 A 、 B 、 C 三种类型, 能承载的乘客数分别为 180 人、145 人、80 人. 假设这三种飞机出现的概率相同, 求在三小时内到达机场的最多乘客数的数学期望.



解. 用 Y_i 表示第 i 架飞机的乘客数, $X(t)$ 表示 t 时刻为止到达机场的乘客数, 则

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i.$$

从而

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_i] &= \frac{1}{3}(180 + 145 + 80) = 135, \quad \forall i, \\ \mathbb{E}[X(3)] &= \lambda \cdot 3\mathbb{E}[Y_i] = 5 \times 3 \times 135 = 2025.\end{aligned}$$

#

注. 该模型场景亦可用于(银行柜台客户或)保险理赔总额问题, A, B, C 分别为车险、财险、寿险.



例 4.6.2 * 某零件在运行中会受到撞击, 记在 $(0, t]$ 内受到的撞击次数为 $N(t)$, 设 $\{N(t)\}$ 是参数为 λ 的 Poisson 过程.
各次撞击带来的磨损量分别为 ζ_1, ζ_2, \dots , 假设它们是独立同服从参数为 β 的指数分布, 且与 $N(t)$ 独立.
如果磨损量大于等于 $\alpha (> 0)$ 则更换零件.
计算零件的平均寿命.



解. 假设此零件的寿命是 η , 令 $X(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} \zeta_k$, 则
 $\eta = \inf\{t > 0 : X(t) \geq \alpha\}$.

$$\mathbb{E}\eta = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(\eta > t) dt = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X(t) < \alpha) dt,$$

而

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X(t) < \alpha) &= \sum_n \mathbb{P}(N(t) = n) \mathbb{P}(X(t) < \alpha | N(t) = n) \\ &= \sum_n \mathbb{P}(N(t) = n) \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^n \zeta_k < \alpha | N(t) = n\right) \\ &= \sum_n \mathbb{P}(N(t) = n) \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^n \zeta_k < \alpha\right) \quad (\because \{\zeta_k\} \text{ 与 } \{N(t)\} \text{ 独立}). \end{aligned}$$



令 $M(t) := \sup\{n \geq 0 : \sum_{k=1}^n \xi_k \leq t\}$, 则 $\{M(t)\}$ 是参数为 β 的 Poisson 过程,

$$\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^n \xi_k < \alpha\right) = \mathbb{P}(M(\alpha) \geq n).$$

所以

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\eta &= \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X(t) < \alpha) dt \\ &= \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \mathbb{P}(M(\alpha) \geq n) dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \mathbb{P}(M(\alpha) \geq n) dt. \end{aligned}$$



因为

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} dt = \frac{1}{\lambda n!} \int_0^{\infty} e^{-u} u^n du = \frac{1}{\lambda},$$

而 $M(\alpha)$ 是非负整数值随机变量, 所以

$$\mathbb{E}[M(\alpha)] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(M(\alpha) > n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(M(\alpha) \geq n),$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\eta &= \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(M(\alpha) \geq n) = \frac{1}{\lambda} (1 + \mathbb{E}[M(\alpha)]) \\ &= \frac{1}{\lambda} (1 + \alpha\beta). \end{aligned}$$



上例答案解析

$$\mathbb{E}[\eta] = \frac{1}{\lambda}(1 + \alpha\beta),$$

其中参数的含义如下:

- (1) λ 是平均撞击次数.
 λ 越大撞击次数越多, 零件受损越严重, 使用寿命越短.
- (2) β 是每次撞击时平均磨损量的倒数.
 β 越大, 每次撞击时平均磨损量越小, 所以寿命越长.
- (3) α 是设计时允许零件受损的上限.
 α 越大, 寿命越长.



定理 4.6.1:

复合 Poisson 过程 $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ 有平稳独立增量.

(证明略)

注. 该性质保证了我们可以用时间比例缩放风险. 比如,

1 天的方差是 σ^2 , 那么 10 天的方差就是 $10\sigma^2$.

(这在计算 VaR 时非常常用).



定理 4.6.1:

复合 Poisson 过程 $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ 有平稳独立增量.

(证明略)

注. 该性质保证了我们可以用时间比例缩放风险. 比如,

1 天的方差是 σ^2 , 那么 10 天的方差就是 $10\sigma^2$.

(这在计算 VaR 时非常常用).



定理 4.6.1:

复合 Poisson 过程 $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ 有平稳独立增量.

(证明略)

注. 该性质保证了我们可以用时间比例缩放风险. 比如,

1 天的方差是 σ^2 , 那么 10 天的方差就是 $10\sigma^2$.

(这在计算 VaR 时非常常用).



Lundberg-Cramer 经典破产模型

假设保险公司在时刻 t 的盈余可表示为：

$$U(t) = u + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} X_k, \quad t \geq 0$$

其中, $U(0) = u$ 表示保险公司的初始盈余, c 为保险公司单位时间征收的保险费率, 忽略利息, 则到时刻 t 为止发生的索赔费为

ct . 累积索赔金额 $S(t) := \sum_{k=1}^{N(t)} X_k$ 是复合Poisson过程.



称

$$T := \inf\{t : U(t) < 0\} \quad (\inf\{\emptyset\} = +\infty)$$

为保险公司首次破产时刻, 破产概率定义为

$$\Psi(u) := \mathbb{P}(T < \infty | U(0) = u), \quad u \geq 0.$$

定理 4.6.2 告诉我们,

如果存在调节系数 $R > 0$, 则破产概率 $\Psi(u)$ 满足不等式

$$\Psi(u) \leq e^{-Ru}, \quad u \geq 0.$$

可见资本金是风险的超级缓冲器.



称

$$T := \inf\{t : U(t) < 0\} \quad (\inf\{\emptyset\} = +\infty)$$

为保险公司首次破产时刻, 破产概率定义为

$$\Psi(u) := \mathbb{P}(T < \infty | U(0) = u), \quad u \geq 0.$$

定理 4.6.2 告诉我们,

如果存在调节系数 $R > 0$, 则破产概率 $\Psi(u)$ 满足不等式

$$\Psi(u) \leq e^{-Ru}, \quad u \geq 0.$$

可见资本金是风险的超级缓冲器.



补充例. 假设某保险业务的调节系数 $R = 0.002$. 监管要求破产概率必须低于 1%. 问: 初始资本金 u 至少要是多少?



14. (习题二) 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数为 $\lambda (> 0)$ 的 Poisson 过程, 求:

(2) n 维概率分布.

解. (2) 对任意

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n, k_1, k_2, \cdots, k_n \in \mathbf{Z}^+, k_0 = 0,$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(N(t_1) = k_1, \cdots, N(t_n) = k_n) \\ &= \mathbb{P}(N(t_1) = k_1, N(t_2) - N(t_1) = k_2 - k_1, \cdots, \\ & \quad N(t_n) - N(t_{n-1}) = k_n - k_{n-1}) \\ &= \lambda^{k_n} \prod_{i=1}^n \frac{(t_i - t_{i-1})^{k_i - k_{i-1}}}{(k_i - k_{i-1})!} e^{-\lambda t_n}. \end{aligned}$$



13. (习题四) 计算 (S_1, S_2, S_3) 的联合分布.

解. 注意到 (S_1, S_2, S_3) 的值域为

$$G = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : 0 < y_1 < y_2 < y_3\},$$

对于任意 $0 < s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < s_3 < t_3$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}((S_1, S_2, S_3) \in (s_1, t_1] \times (s_2, t_2] \times (s_3, t_3]) \\ &= \mathbb{P}(s_1 < S_1 \leq t_1 < s_2 < S_2 \leq t_2 < s_3 < S_3 \leq t_3) \\ &= \mathbb{P}(N(s_1) = 0, N(t_1) - N(s_1) = 1, N(s_2) - N(t_1) = 0, N(t_2) - N(s_2) = 1, N(s_3) - N(t_2) = 0, \\ & \quad N(t_3) - N(s_3) \geq 1) \\ &= \mathbb{P}(N(s_1) = 0) \mathbb{P}(N(t_1) - N(s_1) = 1) \mathbb{P}(N(s_2) - N(t_1) = 0) \mathbb{P}(N(t_2) - N(s_2) = 1) \\ & \quad \cdot \mathbb{P}(N(s_3) - N(t_2) = 0) \mathbb{P}(N(t_3) - N(s_3) \geq 1) \\ &= e^{-\lambda s_1} e^{-\lambda(t_1 - s_1)} e^{-\lambda(s_2 - t_1)} e^{-\lambda(t_2 - s_2)} e^{-\lambda(s_3 - t_2)} (1 - e^{-\lambda(t_3 - s_3)}) \lambda(t_1 - s_1) \lambda(t_2 - s_2) \\ &= \lambda^2 (t_1 - s_1) (t_2 - s_2) e^{-\lambda s_3} (1 - e^{-\lambda(t_3 - s_3)}) \\ &= \int_{s_1}^{t_1} \int_{s_2}^{t_2} \int_{s_3}^{t_3} \lambda^3 e^{-\lambda y_3} dy_1 dy_2 dy_3, \end{aligned}$$

故所求联合密度为 $(y_1, y_2, y_3) \mapsto \lambda^3 e^{-\lambda y_3} \cdot \mathbf{1}_{\{0 \leq y_1 < y_2 < y_3\}}$.



11. 解. (1) 设 $X^{(1)}$ 为第一个事件来自 N_1 的时间, $X^{(2)}$ 为第一个事件来自 N_2 的时间, 则 $X^{(i)} \sim \text{Exp}(\lambda_i), i = 1, 2$, 从而 $(X^{(1)}, X^{(2)})$ 的密度函数为

$$(t_1, t_2) \mapsto \lambda_1 \lambda_2 e^{-(\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2)} 1_{\{t_1 \geq 0, t_2 \geq 0\}},$$

从而

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{第一个事件来自 } N_1) &= \mathbb{P}(X^{(1)} < X^{(2)}) \\ &= \iint_{t_1 < t_2} \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2} dt_1 dt_2 = \lambda_1 \lambda_2 \int_0^\infty e^{-\lambda_1 t_1} dt_1 \int_{t_1}^\infty e^{-\lambda_2 t_2} dt_2 \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \int_0^\infty e^{-\lambda_1 t_1} e^{-\lambda_2 t_1} dt_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \end{aligned}$$

显然, 此概率值与 $X^{(1)}$ 无关.



(2) 时间间隔序列是独立同分布的, 故所求概率为

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_2(X_1^{(1)}) = k) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(N_2(X_1^{(1)}) = k | X_1^{(1)} = t) \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} dt \\ &= \int_0^\infty \mathbb{P}(N_2(t) = k) \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} dt \quad (: \text{因为 } N_1 \text{ 与 } N_2 \text{ 的独立性}) \\ &= \frac{\lambda_1 \lambda_2^k}{k!} \int_0^\infty t^k e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} dt = \frac{\lambda_1 \lambda_2^k}{k! (\lambda_1 + \lambda_2)^{k+1}} \int_0^\infty t^k e^{-t} dt \\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^k, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

直观上, 在过程 N_1 中两个相邻事件间, 过程 N_2 出现的次数服从几何分布.



(2) 时间间隔序列是独立同分布的, 故所求概率为

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(N_2(X_1^{(1)}) = k) &= \int_0^{\infty} \mathbb{P}(N_2(X_1^{(1)}) = k | X_1^{(1)} = t) \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} dt \\
 &= \int_0^{\infty} \mathbb{P}(N_2(t) = k) \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} dt \quad (: \text{因为 } N_1 \text{ 与 } N_2 \text{ 的独立性}) \\
 &= \frac{\lambda_1 \lambda_2^k}{k!} \int_0^{\infty} t^k e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} dt = \frac{\lambda_1 \lambda_2^k}{k! (\lambda_1 + \lambda_2)^{k+1}} \int_0^{\infty} t^k e^{-t} dt \\
 &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^k, \quad k = 0, 1, \dots
 \end{aligned}$$

直观上, 在过程 N_1 中两个相邻事件间, 过程 N_2 出现的次数服从几何分布.



12. 若干事件之间的关系:

(1) $\{N(t) < n\} = \{S_n > t\};$

(2) $\{N(t) \leq n\} \supset \{S_n \geq t\};$

(3) $\{N(t) > n\} \subset \{S_n < t\};$

(4) $\{S_{N(t)+1} - t > s\} = \{N(t+s) - N(t) = 0\}.$



14. 产生一个 Poisson 随机变量. 设 U_1, U_2, \dots 是独立的 $(0, 1)$ 上均匀分布的随机变量.

(1) 若 $X_i = (-\log U_i)/\lambda$, 证明 X_i 服从参数为 λ 的指数分布;

证. 对任意 $x \geq 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_i \leq x) &= \mathbb{P}((-\log U_i)/\lambda \leq x) \\ &= \mathbb{P}(U_i \geq e^{-\lambda x}) = 1 - e^{-\lambda x}.\end{aligned}$$

(2) 若 N 定义为满足下式之 n 值:

$$\prod_{i=1}^n U_i \geq e^{-\lambda} > \prod_{i=1}^{n+1} U_i, \quad \prod_{i=1}^0 U_i \equiv 1,$$

利用 (1) 证明 N 服从均值为 λ 的 Poisson 分布(试与习题二, 第 7 题比较).



14. 产生一个 Poisson 随机变量. 设 U_1, U_2, \dots 是独立的 $(0, 1)$ 上均匀分布的随机变量.

(1) 若 $X_i = (-\log U_i)/\lambda$, 证明 X_i 服从参数为 λ 的指数分布;

证. 对任意 $x \geq 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_i \leq x) &= \mathbb{P}((-\log U_i)/\lambda \leq x) \\ &= \mathbb{P}(U_i \geq e^{-\lambda x}) = 1 - e^{-\lambda x}.\end{aligned}$$

(2) 若 N 定义为满足下式之 n 值:

$$\prod_{i=1}^n U_i \geq e^{-\lambda} > \prod_{i=1}^{n+1} U_i, \quad \prod_{i=1}^0 U_i \equiv 1,$$

利用 (1) 证明 N 服从均值为 λ 的 Poisson 分布(试与习题二, 第 7 题比较).



14. (续)

证. 若以 X_i 表示 Poisson 过程 $\{N(t)\}$ 的来到时间间隔, 则

$$\sum_{i=1}^n X_i \leq 1 < \sum_{i=1}^{n+1} X_i$$

表示时间 $[0, 1)$ 内发生了 n 个事件.

$$\mathbb{P}(N = n) = \mathbb{P}\left(\prod_{i=1}^n U_i \geq e^{-\lambda} > \prod_{i=1}^{n+1} U_i\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \leq 1 < \sum_{i=1}^{n+1} X_i\right)$$

从而

$$\mathbb{P}(N = n) = \mathbb{P}(N(1) = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}.$$

即 N 服从均值为 λ 的 Poisson 分布.



17. 设 $U_{(1)}, \dots, U_{(n)}$ 记 n 个独立的 $(0, 1)$ 上的均匀分布的随机变量的顺序统计量. 证明: 在已知 $U_{(n)} = y$ 的条件下, $U_{(1)}, \dots, U_{(n-1)}$ 的分布与 $n-1$ 个独立的 $(0, y)$ 上均匀分布的随机变量的顺序统计量的分布相同.

证. 首先

$$(U_{(1)}, \dots, U_{(n)}) \sim (u_1, \dots, u_n) \mapsto n! \mathbf{1}_{\{u_1 < \dots < u_n\}},$$

而 $U_{(n)}$ 的密度是 $y \mapsto ny^{n-1}$, $0 < y < 1$, 所以

$$\begin{aligned} & (U_{(1)}, \dots, U_{(n-1)} | U_{(n)} = y) \\ & \sim f(u_1, \dots, u_{n-1}) = (n-1)! \frac{1}{y^{n-1}}, \quad 0 \leq u_1 < \dots < u_{n-1} \leq y. \end{aligned}$$

